Suites définies par récurrence – problèmes standard

CORRIGÉ

Ce fichier d'exercices fait suite à la vidéo suites : petite étude (lien Youtube).

Plusieurs méthodes différentes, vues ou non dans la vidéo, sont présentées ici, pour attaquer les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

TABLE DES MATIÈRES

Énoncé

1. **M**éthode 1 $\boxed{\text{avec une récurrence}}$.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=4u_n+2$ et $u_0=0$
   a. Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).
   b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq -\frac{2}{3}$.
   c. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$.
   d. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.
   e. (u_n) est-elle convergente ? divergente ?
2. **M**éthode 2 $\boxed{\text{avec le signe de } f(x)-x}$ sur une suite arithmético-géométrique.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=\frac{u_n}{3}+6$ et $u_0=27$.
   a. Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).
   b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 9$.
   c. Donner le signe de $f(x)-x$ suivant x, sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{3}+6$.
   d. Démontrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$.
   e. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.
   f. (u_n) est-elle convergente ? divergente ?
3. **M**éthode 3 $\boxed{\text{avec les variations de } f}$ sur une suite homographique.
   On considère la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$.
   a. Calculer mentalement u_1, u_2.
   b. Vérifier que la suite est toujours défine, i.e. que u_n ne vaut jamais -2.
   Indication : vérifier par une récurrence simple que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 0$.
   c. Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$.
   d. Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $0\leq u_n\leq 3$.
   e. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
   Indication : montrer que $u_{n+1}\geqslant u_n$ par récurrence en utilisant le fait que $f\nearrow$.
   f. La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Si elle converge, déterminer sa limite.
4. **M**éthode 4 $\boxed{\text{avec une suite auxiliaire}}$ sur une suite arithmético-géométrique.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=0.4\times u_n+6$ et $u_0=-10$.
   a. Calculer mentalement u_1, u_2.
   b. Pour tout $n\geq 0$ on pose $v_n=u_n-10$. Calculer mentalement v_0, v_1, v_2.
   c. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et donner son terme général.
   d. En déduire le terme général de (u_n), puis les variations et la convergence de (u_n).
5. **S**uites arithmético-géométriques, une autre situation : les « toiles d'araignées ».
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=-\frac{u_n}{3}+16$ et $u_0=21$.
   a. Calculer mentalement u_1, u_2.
   b. Démontrer que $u_n>12\Rightarrow u_{n+1}<12$.
   c. Étudier comme précédemment la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-12$ et conclure.

Méthode 1 $\boxed{\textbf{avec une récurrence}}$**.**

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=4u_n+2$ et $u_0=0$

a) Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).

$u_1=4\times u_0+2=2$;
$u_2=4\times 2+2=10$;
$u_3=4\times 10+2=42$.

Remarque 1. Pour avoir les autres valeurs sur la calculatrice, taper 0 ↩ puis rep $\times 4+2$ ↩ puis ↩ ↩ ↩ ↩ jusqu'à obtenir le rang voulu.

b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>-\frac{2}{3}$.

- initialisation : bien sûr vrai pour $n=0$ puisque $0>-\frac{2}{3}$;
- hérédité : supposons que c'est vrai au rang n, i.e. $u_n>-\frac{2}{3}$ et on va reconstruire u_{n+1} à partir de là :
$$u_n>-\frac{2}{3}\Rightarrow 4u_n>-\frac{2}{3}\times 4\Leftrightarrow 4u_n>-\frac{8}{3}\Rightarrow 4u_n+2>-\frac{8}{3}+2\Leftrightarrow u_{n+1}>-\frac{2}{3};$$
- conclusion : on a montré que pour tout $n\geq 0$: $u_n>-\frac{2}{3}$.

c) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}>u_n$.

- Initialisation : c'est vrai en $n=0$ car effectivement $2>0$;
- hérédité : supposons $u_{n+1}>u_n$ pour une certaine valeur de n, alors, comme précédemment, on va reconstruire u_{n+1} à droite, et u_{n+2} à gauche :
$u_{n+1}>u_n\Rightarrow 4u_{n+1}>4u_n\Rightarrow 4u_{n+1}+2>4u_n+2$ ce qui signifie exactement que $u_{n+2}>u_{n+1}$;
- conclusion : on a prouvé que pour tout $n\geq 0$: $u_{n+1}\geq u_n$, i.e. la suite (u_n) est croissante.

d) Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.

Alors ℓ vérifie $4\ell+2=\ell\Leftrightarrow\ell=-\frac{2}{3}$.

e) (u_n) est-elle convergente ? divergente ?

La supposition que nous avons faite à la question précédente est fausse, car il est impossible d'avoir à la fois :

- $u_n>-\frac{2}{3}$ pour tout $n\geq 0$;
- (u_n) croissante ;
- (u_n) converge vers $-\frac{2}{3}$.

Donc la suite (u_n) est divergente.

Une suite croissante qui ne converge pas est non majorée : c'est du bon sens, car, étant croissante, si elle était non majorée, elle serait convergente (*toute suite croissante majorée converge*).

Remarque 2. La phrase précédente s'appelle « contraposée ». C'est un résultat de logique qui s'énonce ainsi : si l'on est sûr que $A\Rightarrow B$ alors on peut être sur que non $B\Rightarrow$ non A.

Exemple : « être supérieur à 2 » ⇒ « être supérieur à 1 ». Donc (contraposée) : « être inférieur à 1 » ⇒ « être inférieur à 2 ».

Ici, en supposant (u_n) croissante, le théorème du cours indique que majorée ⇒ convergente. La contraposée du théorème indique que divergente ⇒ non majorée (*divergente* est le contraire de *convergente* et le mot *majorée* ne possède pas de contraire dans le dictionnaire).

La contraposée d'un théorème est toujours vraie.

Et une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$: ceci se démontre assez techniquement si votre enseignant vous a fait la définition de « tendre vers $+\infty$ » avec la notation ε. Je ne le fais pas ici, on l'admet.

Méthode 2 $\boxed{\text{avec le signe de } f(x)-x}$ sur une suite arithmético-géométrique.

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=\frac{u_n}{3}+6$ et $u_0=27$.

1. Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).

   $u_1=\frac{u_0}{3}+6=\frac{27}{3}+6=9+6=15.$

   $u_2=\frac{u_1}{3}+6=\frac{15}{3}+6=5+6=11.$

2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 9$.
   - initialisation : c'est vrai pour u_0 car $u_0=27$ et $27\geq 9$;
   - hérédité : si $u_n\geq 9$ pour une certaine valeur de n, alors $\frac{u_n}{3}\geq 3$ donc $\frac{u_n}{3}+6\geq 9$ i.e. $u_{n+1}\geq 9$;
   - conclusion : la propriété « $u_n\geq 9$ » est héréditaire et initialisée à $n=0$ donc vraie pour tout $n\geq 0$.

3. Donner le signe de $f(x)-x$ suivant x, sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{3}+6$.

   $f(x)-x=\frac{x}{3}+6-x=\frac{-2x}{3}+\frac{18}{3}=\frac{2(9-x)}{3}$ donc

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

.

4. Démontrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$.

   Étudions le signe de $u_{n+1}-u_n$. On a $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$.

   Mais on sait que pour tout rang n on a $u_n\geq 9$, or dans $[9,+\infty[$ on a $f(x)-x\leq 0$ comme l'atteste le tableau de la question précédente.

   Ainsi, pour tout rang n on a $f(u_n)-u_n\leq 0$.

   Ceci prouve finalement que $u_{n+1}-u_n\leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.

   Le théorème de notre cours affirme que si (u_n) converge vers ℓ alors ℓ est un *point fixe* de f, c'est-à-dire que $f(\ell)=\ell$. Pour appliquer ce théorème, je me rappelle toutefois qu'il faut vérifier que la fonction f est continue, ce qui est avéré ici puisque f est une fonction affine.

   Ainsi je suis amené à résoudre l'équation $\frac{\ell}{3}+6=\ell$ qui est une équation du premier degré à une inconnue, maîtrisée depuis le collège. Elle a pour solution $\ell=9$.

6. (u_n) est-elle convergente ? divergente ?

   (u_n) est décroissante minorée par 9 d'après les questions précédentes.

   Un autre théorème de mon cours afirme qu'elle est donc convergente.

   Sa seule limite possible étant 9, elle est convergente vers 9.

Méthode 3 $\boxed{\text{avec les variations de } f}$ **sur une suite homographique.**

On considère la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$.

a) Calculer mentalement u_1, u_2.

$u_1=\frac{4\times 0+3}{0+2}=\frac{3}{2}=1.5$.

$u_2=\frac{4\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{9}{3.5}=\frac{18}{7}$.

b) Vérifier que la suite est toujours défine, i.e. que u_n ne vaut jamais -2.

Indication : vérifier par une récurrence simple que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 0$.

C'est une récurrence immédiate car $u_0=0$ et $u_n\geq 0\Rightarrow\begin{cases}4u_n+3\geq 0\\ u_n+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\frac{4u_n+3}{u_n+2}\geq 0$.

c) Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$.

$f'(x)=\left(\frac{4x+3}{x+2}\right)'=\frac{4(x+2)-(4x+3)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$ toujours positif sur $\mathbb{R}_+$ (la valeur interdite n'est pas dans $\mathbb{R}_+$) donc $f\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.

a) On remarque pour la suite que $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$.

b) L'intervalle $\mathbb{R}_+$ proposé est pertinent puisqu'on ne fait agir f que sur u_n or tous les u_n sont positifs.

c) On ne peut pas affirmer que f croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier car en -2 (qui est la valeur interdite), la fonction f fait une sorte de « saut » de $+\infty$ à $-\infty$ (**Figure 1**)

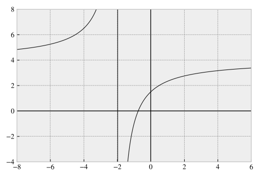

Figure 1. homographique-pb-suite.png

d) Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $0\leqslant u_n\leqslant 3$.

- initialisation : immédiate puisque $u_0=0$;
- hérédité : je suppose $0\leq u_n\leq 3$ alors $f(0)\leq f(u_n)\leq f(3)$ parce que f est croissante sur $[0,3]\subset\mathbb{R}_+$.

  soit : $\frac{3}{2}\leqslant f(u_n)\leqslant\frac{15}{5}=3$

  donc *a fortiori* $0\leqslant f(u_n)\leqslant 3$ c'est-à-dire $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$.

Remarque 4. $a\leqslant b$ et f croissante sur $[a,b]$ impliquent $f(a)\leqslant f(b)$.

C'est la définition de « f croissante ».

L'implication n'est pas forcément vrai si f n'est pas croissante, contre exemples :

- $-3\leq 2$ mais si $u(x)=x^2$ alors $u(-3)>u(2)$;
- ou bien si $v(x)=\frac{1}{1-x}$ alors $v(-3)=\frac{1}{4}>-1=v(2)$.

e) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Indication : montrer que $u_{n+1}\geqslant u_n$ par récurrence en utilisant le fait que $f\nearrow$.

- initialisation : $u_1=1.5\geq u_0$ donc la propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_{n+1}\geq u_n$ » est vraie en $n=0$ (autrement dit, $\mathscr{P}_0$ est vraie) ;
- hérédité : je suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain n (i.e. je suppose $u_{n+1}\geq u_n$) alors vu que u_n et u_{n+1} sont dans [0, 3] et que dans cet intervalle f est croissante, je peux appliquer f à l'inégalité, soit $f(u_{n+1})\geq f(u_n)$, ce qui signifie $u_{n+2}\geq u_{n+1}$ ce qui est exactement la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$, et j'ai donc montré que $\mathscr{P}_n\Rightarrow\mathscr{P}_{n+1}$;
- conclusion : la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\geq 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

f) La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Si elle converge, déterminer sa limite.

La suite (u_n) est croissante. D'autre part, elle est majorée par 3 (puisque tous les u_n sont dans $[0,3]$), et donc la suite (u_n) est CV.

Pour connaître la limite ℓ j'applique le théorème qui affirme que :

- si f continue ;
- si (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ (quelle que soit la valeur de u_0) ;
- si (u_n) CV vers une limite ℓ ;
- alors : $f(\ell)=\ell$.

Remarque 5. Les valeurs de ℓ telles que $f(\ell)=\ell$ sont appelées *points fixes* de f. Si la suite (u_n) CV c'est donc forcément vers un point fixe de f.

Ici je résous donc $\ell=\frac{4\ell+3}{\ell+2}\Leftrightarrow\ell(\ell+2)=4\ell+3\Leftrightarrow\ell^2-2\lambda-3=0\Leftrightarrow\ell\in\{-1;3\}$.
Vu que la suite (u_n) est coincée dans $[0,3]$ elle ne peut pas converger vers -1.
Donc $\ell=3$.

Remarque 6. Pour la question de la monotonie on pouvait procéder directement :

$$u_{n+1}-u_n=u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n+3}{u_n+2}-\frac{u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{4u_n+3-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-(u_n)^2+2u_n+3}{u_n+2}.$$

On aimerait savoir si la quantité $-(u_n)^2+2u_n+3$ est positive.
Puisque de toutes façons, la quantité u_n+2 est toujours positive d'après la question b.
Le quotient $u_{n+1}-u_n$ est donc tojours du signe de $-(u_n)^2+2u_n+3$.

Alors, étudions le trinome $-x^2+2x+3$ et résolvons $-x^2+2x+3\geqslant 0$. On trouve les racines -1 et 3.
Donc $-x^2+2x+3\geqslant 0$ dans $[-1,3]$ et là BINGO car u_n est toujours dans $[0,3]$.
Et donc on a toujours $-(u_n)^2+2u_n+3\geq 0$ donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.

Méthode 4 $\boxed{\textbf{avec une suite auxiliaire}}$ **sur une suite arithmético-géométrique.**

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = 0.4 \times u_n + 6$ et $u_0 = -10$.

a) Calculer mentalement u_1, u_2.

$u_1 = 0.4 \times u_0 + 6 = 0.4 \times (-10) + 6 = -4 + 6 = 2$;

$u_2 = 0.4 \times u_1 + 6 = 0.4 \times 2 + 6 = 6.8$.

b) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n - 10$. Calculer mentalement v_0, v_1, v_2.

$v_0 = u_0 - 10 = -20$;

$v_1 = u_1 - 10 = -8$;

$v_2 = u_2 - 10 = 6.8 - 10 = -3.2$.

c) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et donner son terme général.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 10$ car la formule $v_n = u_n - 10$ est vraie en tout rang, y compris en $n+1$.

$v_{n+1} = 0.4 \times u_n + 6 - 10$ car on sait que $u_{n+1} = 0.4 \times u_n + 6$.

$v_{n+1} = 0.4\, u_n - 4$ car on simplifie, tout simplement.

$v_{n+1} = 0.4\, (u_n - 10)$ par simple factorisation.

$v_{n+1} = 0.4 \times v_n$ car on se souvient que $v_n = u_n - 10$.

On a démontré que (v_n) est géométrique de raison 0.4 et donc $v_n = v_0 \times 0.4^n$.

On remplace et donc $v_n = -20 \times 0.4^n$ puisque $v_0 = -20$.

Je vérifie : la formule donne $v_1 = -20 \times 0.4 = -8$ c'est bon.

d) En déduire le terme général de (u_n), puis les variations et la convergence de (u_n).

On a pour tout n la relation : $u_n = v_n + 10$.

Ce qui donne $u_n = 10 - 20 \times 0.4^n$. Je vérifie : la formule donne $u_1 = 10 - 20 \times 0.4 = 10 - 8 = 2$ c'est bon.

Maintenant, les variations et la convergence :

- La suite (0.4^n) est décroissante et converge vers 0 (puisque $0.4 \in]0, 1[$).
- La suite (-20×0.4^n) est donc croissante (opposé d'une suite décroissante) et CV vers 0 aussi.
- La suite (u_n) est donc croissante et CV vers 10.

Suites arithmético-géométriques, une autre situation : les « toiles d'araignées ».

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = -\frac{u_n}{3} + 16$ et $u_0 = 21$.

1. Calculer mentalement u_1, u_2.
   $u_1 = -\frac{21}{3} + 16 = -7 + 16 = 9$;
   $u_2 = -\frac{9}{3} + 16 = -3 + 16 = 13$.
2. Démontrer que $u_n > 12 \Rightarrow u_{n+1} < 12$.
   $u_n > 12 \Rightarrow \frac{u_n}{3} > 4 \Rightarrow -\frac{u_n}{3} < -4 \Rightarrow u_{n+1} < -4 + 16 = 12$.
3. Étudier comme précédemment la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12$ et conclure.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = -\frac{u_n}{3} + 16 - 12 = -\frac{u_n}{3} + 4 = -\frac{1}{3}(u_n - 12) = -\frac{1}{3} v_n$ donc (v_n) géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
   Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule $v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ or $v_0 = u_0 - 12 = 9$.
   D'où le terme général $u_n = v_n + 12 \Leftrightarrow \boxed{u_n = 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 12}$.
   Vérification : $u_1 = 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + 12 = -3 + 12 = 9$ c'est ok.
   On a alors (u_n) convergente vers 12 car $-\frac{1}{3} \in]0, 1[\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
   Cette suite converge en alternant à gauche et à droite de la limite 12.